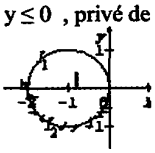
c) Ensemble Γ_1 des points M_1 :

On a : $z_1 = -1+e^{i\theta} \Leftrightarrow z_1 - (-1) = e^{i\theta}$

$\Leftrightarrow |z_1 - z_I| = |e^{i\theta}| = 1 \Leftrightarrow IM_1 = 1$ et $\theta \in]0, \pi[$

Donc l'ensemble Γ_1 des points M_1 est le demi – cercle de centre I et de rayon 1 privé de A et O situés dans le demi plan $y \geq 0$

Puisque $S_I(M_1) = M_2$,on en déduit que Γ_2 est le demi cercle de centre I et de rayon 1 situés dans le demi plan $y \leq 0$, privé de A et O



d) I milieu du segment $[M_1M_2]$ et I est le milieu du segment [OA] car : $\frac{z_A+z_O}{2} = \frac{-2+0}{2} = -1 = z_I$

Donc $[M_1M_2]$ et [OA] ont même milieu ce qui prouve que le quadrilatère OM_1AM_2 est un <u>parallélogramme</u> **(1)**

Aussi on a : $\frac{aff(\overrightarrow{OM_1})}{aff(\overrightarrow{OM_2})} = \frac{z_1}{z_2} = -i\,tg\frac{\theta}{2}$ imaginaire pur donc $\overrightarrow{OM_1} \perp \overrightarrow{OM_2}$ **(2)**

(1) + (2) donne : OM_1AM_2 est un rectangle

- Pour que OM_1AM_2 soit un carré il suffit que :

$OM_1 = OM_2 \Leftrightarrow \frac{OM_1}{OM_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} = 1$

$\Leftrightarrow \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|-itg\frac{\theta}{2}\right| = 1 \Leftrightarrow \left|tg\frac{\theta}{2}\right| = 1$, or $tg\frac{\theta}{2} > 0$

D'où $\left|tg\frac{\theta}{2}\right| = tg\frac{\theta}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, comme $\theta \in]0, \pi[$

Alors pour $\boxed{\theta = \frac{\pi}{2}}$: OM_1AM_2 est un carré

Exercice n° 20 $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

a)

- $z_1 = 1 - e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}) = -2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$

Comme $\frac{\theta}{2} \in]0, \frac{\pi}{4}[$ donc $\sin\frac{\theta}{2} > 0$

D'où $z_1 = = 2\sin\frac{\theta}{2}e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2})}$

$$\boxed{|z_1| = 2\sin\frac{\theta}{2} \text{ et } Arg(z_1) \equiv \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}[2\pi]}$$

- $z_2 = 1 - e^{3i\theta} = e^{i\frac{3\theta}{2}}(e^{-i\frac{3\theta}{2}} - e^{i\frac{3\theta}{2}}) = -2i\sin\frac{3\theta}{2}e^{i\frac{3\theta}{2}}$

Comme $\frac{3\theta}{2} \in]0, \frac{3\pi}{4}[$ donc $\sin\frac{3\theta}{2} > 0$

D'où $z_2 = = 2\sin\frac{3\theta}{2}e^{i(\frac{3\theta}{2}-\frac{\pi}{2})}$

$$\boxed{|z_2| = 2\sin\frac{3\theta}{2} \text{ et } Arg(z_2) \equiv \frac{3\theta}{2} - \frac{\pi}{2}[2\pi]}$$

b) On a : $a^3 - b^3 = (a-b).(a^2+ab+b^2)$

$\Leftrightarrow \frac{a^3-b^3}{a-b} = a^2+ab+b^2$

Posons $a = 1$ et $b = e^{i\theta}$ donc $a^3 = 1$ et $b^3 = e^{3i\theta}$

D'où : $\frac{1-e^{3i\theta}}{1-e^{i\theta}} = 1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta}$

$\Rightarrow z_3 = \frac{z_2}{z_1} \Leftrightarrow |z_3| = \left|\frac{z_2}{z_1}\right| \Leftrightarrow |z_3| = \frac{|z_2|}{|z_1|}$

$\Rightarrow |z_3| = \frac{\not{2}\sin\frac{3\theta}{2}}{\not{2}\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin\frac{3\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$

Aussi on a : $Arg(z_3) \equiv Arg(z_2) - Arg(z_1)[2\pi]$

$\equiv (\frac{3\theta}{2} - \frac{\pi}{2}) - (\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2})[2\pi]$

$\equiv \theta[2\pi]$

<u>Conclusion</u> : $\boxed{Arg(z_3) \equiv \theta[2\pi] \text{ et } |z_3| = \frac{\sin\frac{3\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}}$

● $(E_\theta) : z^2 - (2+e^{2i\theta})z + 1 - e^{3i\theta} = 0$

$\Delta = (2+e^{2i\theta})^2 - 4(1-e^{3i\theta})$

$= 4 + 4e^{2i\theta} + e^{4i\theta} - 4 + 4e^{3i\theta}$

$= e^{2i\theta}(4 + 4e^{i\theta} + e^{2i\theta}) = e^{2i\theta}(2+e^{i\theta})^2$

$= [e^{i\theta}(2+e^{i\theta})]^2$

$\Longrightarrow \delta = e^{i\theta}(2+e^{i\theta}) = 2e^{i\theta} + 2e^{2i\theta}$

D'où

$z' = \frac{2+e^{2i\theta}+2e^{i\theta}+e^{2i\theta}}{2} = 1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} = z_3$

Qarray.tn Aqra Blech-Qarray.tn